LES DROITES PARALLELES

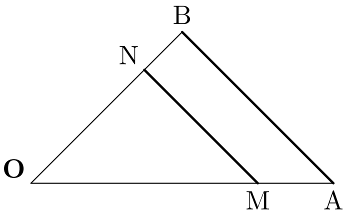
D. LE FUR

Lycée Pasteur, São Paulo

Le théorème de Thalès

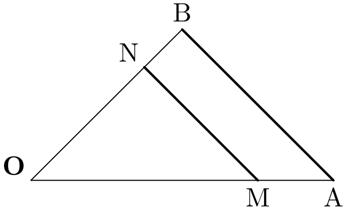
Les configurations de Thalès

Le triangle

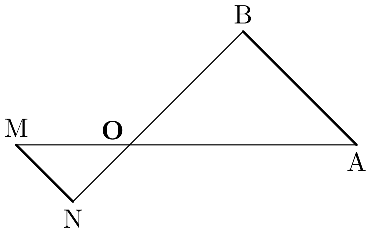


Les configurations de Thalès

Le triangle

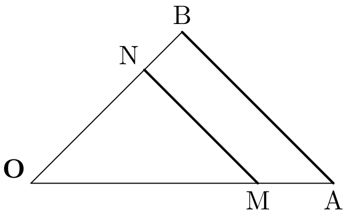


La figure papillon

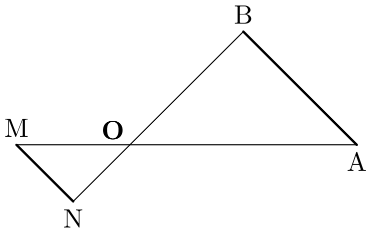


Les configurations de Thalès

Le triangle



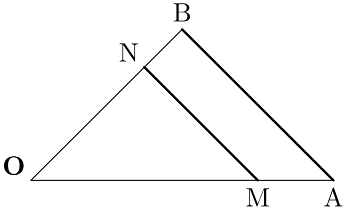
La figure papillon



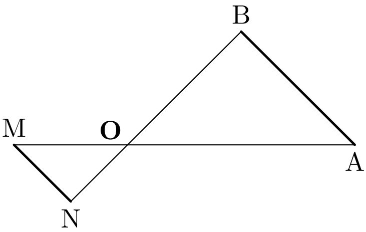
Sur les deux figures suivantes, les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Les configurations de Thalès

Le triangle



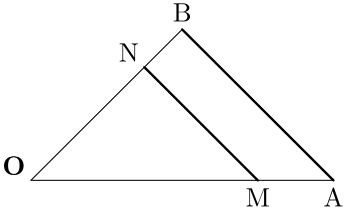
La figure papillon



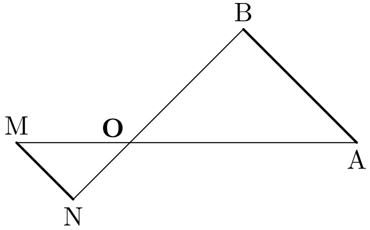
Sur les deux figures suivantes, les droites (AB) et (MN) sont parallèles.
Chacune des configurations fait intervenir cinq points :

Les configurations de Thalès

Le triangle



La figure papillon



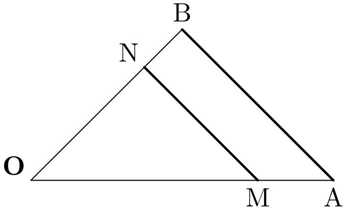
Sur les deux figures suivantes, les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Chacune des configurations fait intervenir cinq points :

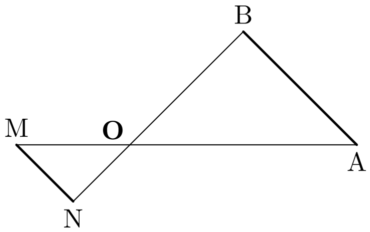
- les quatre points situés sur les parallèles : A, B, M et N ;

Les configurations de Thalès

Le triangle



La figure papillon



Sur les deux figures suivantes, les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Chacune des configurations fait intervenir cinq points :

- les quatre points situés sur les parallèles : A, B, M et N ;
- le dernier point O intersection des sécantes.

Conseil :

pour une meilleure lisibilité de la configuration de Thalès, il sera important de mettre en couleurs les parallèles et le point d'intersection des sécantes.

L'énoncé du théorème

L'énoncé du théorème

M est sur (OA)

L'énoncé du théorème

M est sur (OA)
N est sur (OB)

L'énoncé du théorème

M est sur (OA)
N est sur (OB)
(MN) // (AB)

L'énoncé du théorème

M est sur (OA)
N est sur (OB)
$(MN) \mathbin{//} (AB)$
D'après le théorème de Thalès,

L'énoncé du théorème

M est sur (OA)
N est sur (OB)
$(MN) // (AB)$
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{AB}$$

L'énoncé du théorème

M est sur (OA)
N est sur (OB)
$(MN) \mathbin{//} (AB)$
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{AB}$$

NB : il est très important de respecter cette présentation et de mettre en couleur le "fameux" point O.

Le but du théorème

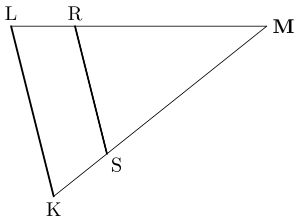
Le théorème de Thalès sert à calculer une longueur.

Le but du théorème

Le théorème de Thalès sert à calculer une longueur.

Pour celà, on choisira deux des trois rapports du théorème dans lesquels on connaîtra trois longueurs et où la quatrième est la longueur à calculer.

Première application : dans un triangle



Enoncé

Sur la figure ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.
Les droites (RS) et (LK) sont parallèles.
On donne :
$LM = 6cm$, $LK = 5cm$, $KM = 8cm$ et $SM = 6cm$.

Calculer RM.

Solution

Calculons RM.

Solution

Calculons RM.

R est sur (ML)

Solution

Calculons RM.

R est sur (ML)
S est sur (MK)

Solution

Calculons RM.

R est sur (ML)
S est sur (MK)
(RS) // (LK)

Solution

Calculons RM.

R est sur (ML)
S est sur (MK)
(RS) // (LK)
D'après le théorème de Thalès,

Solution

Calculons RM.

R est sur (ML)
S est sur (MK)
(RS) // (LK)
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{MR}{ML} = \frac{MS}{MK} = \frac{RS}{LK}$$

Solution

Calculons RM.

R est sur (ML)
S est sur (MK)
(RS) // (LK)
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{MR}{ML} = \frac{MS}{MK} = \frac{RS}{LK}$$

D'où $\dfrac{MR}{ML} = \dfrac{MS}{MK}$

Solution

<u>Calculons RM.</u>

R est sur (ML)
S est sur (MK)
(RS) // (LK)
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{MR}{ML} = \frac{MS}{MK} = \frac{RS}{LK}$$

D'où $\dfrac{MR}{ML} = \dfrac{MS}{MK}$

$$\frac{MR}{6} = \frac{6}{8}$$

Solution

Calculons RM.

R est sur (ML)
S est sur (MK)
(RS) // (LK)
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{MR}{ML} = \frac{MS}{MK} = \frac{RS}{LK}$$

D'où $\dfrac{MR}{ML} = \dfrac{MS}{MK}$

$$\frac{MR}{6} = \frac{6}{8}$$

$$8 \times MR = 6 \times 6$$

Solution

Calculons RM.

R est sur (ML)
S est sur (MK)
(RS) // (LK)
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{MR}{ML} = \frac{MS}{MK} = \frac{RS}{LK}$$

D'où $\dfrac{MR}{ML} = \dfrac{MS}{MK}$

$$\frac{MR}{6} = \frac{6}{8}$$

$$8 \times MR = 6 \times 6$$

$$MR = \frac{36}{8}$$

Solution

<u>Calculons RM.</u>

R est sur (ML)
S est sur (MK)
$(RS)\ //\ (LK)$
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{MR}{ML} = \frac{MS}{MK} = \frac{RS}{LK}$$

D'où $\dfrac{MR}{ML} = \dfrac{MS}{MK}$

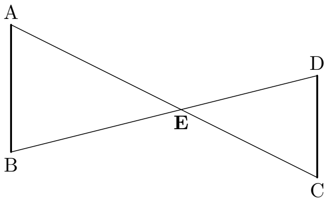
$$\frac{MR}{6} = \frac{6}{8}$$

$$8 \times MR = 6 \times 6$$

$$MR = \frac{36}{8}$$

$$\boxed{MR = \frac{9}{2}}$$

Deuxième application : dans un figure papillon



Enoncé

Sur la figure ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en E.
On donne :
$AB = 3cm$, $BD = 9cm$, $AC = 6cm$ et $BE = 5cm$.

Calculer CD.

Solution

Calculons CD.

Solution

Calculons CD.

C est sur (EA)

Solution

Calculons CD.

C est sur (EA)
D est sur (EB)

Solution

Calculons CD.

C est sur (EA)
D est sur (EB)
(CD) // (AB)

Solution

Calculons CD.

C est sur (EA)
D est sur (EB)
$(CD) // (AB)$
D'après le théorème de Thalès,

Solution

Calculons CD.

C est sur (EA)
D est sur (EB)
$(CD) // (AB)$
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{EC}{EA} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{AB}$$

Solution

Calculons CD.

C est sur (EA)
D est sur (EB)
$(CD) // (AB)$
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{EC}{EA} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{AB}$$

D'où $\frac{ED}{EB} = \frac{CD}{AB}$

Solution

<u>Calculons CD.</u>

C est sur (EA)
D est sur (EB)
(CD) // (AB)
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{EC}{EA} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{AB}$$

D'où $\dfrac{ED}{EB} = \dfrac{CD}{AB}$

avec $ED = BD - BE$

$ED = 9 - 5 = 4cm$

Solution

<u>Calculons CD.</u>

C est sur (EA)
D est sur (EB)
(CD) // (AB)
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{EC}{EA} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{AB}$$

D'où $\dfrac{ED}{EB} = \dfrac{CD}{AB}$

avec $ED = BD - BE$

$ED = 9 - 5 = 4cm$

$$\frac{4}{5} = \frac{CD}{3}$$

Solution

Calculons CD.

C est sur (EA)
D est sur (EB)
$(CD) \mathbin{//} (AB)$
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{EC}{EA} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{AB}$$

D'où $\dfrac{ED}{EB} = \dfrac{CD}{AB}$

avec $ED = BD - BE$

$ED = 9 - 5 = 4cm$

$$\frac{4}{5} = \frac{CD}{3}$$

$5 \times CD = 4 \times 3$

Solution

Calculons CD.

C est sur (EA)
D est sur (EB)
$(CD) // (AB)$
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{EC}{EA} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{AB}$$

D'où $\dfrac{ED}{EB} = \dfrac{CD}{AB}$

avec $ED = BD - BE$

$ED = 9 - 5 = 4cm$

$$\frac{4}{5} = \frac{CD}{3}$$

$5 \times CD = 4 \times 3$

$$\boxed{CD = \frac{12}{5}}$$

La réciproque du théorème de Thalès

Enoncé de la réciproque

Enoncé de la réciproque

A est sur (RS)

Enoncé de la réciproque

A est sur (RS)
B est sur (RT)

Enoncé de la réciproque

A est sur (RS)
B est sur (RT)
L'ordre des points est respecté.

Enoncé de la réciproque

A est sur (RS)
B est sur (RT)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

Enoncé de la réciproque

A est sur (RS)
B est sur (RT)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si

Enoncé de la réciproque

A est sur (RS)
B est sur (RT)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{RA}{RS} = \dfrac{RB}{RT}$,

Enoncé de la réciproque

A est sur (RS)
B est sur (RT)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{RA}{RS} = \dfrac{RB}{RT}$,

alors

Enoncé de la réciproque

A est sur (RS)
B est sur (RT)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{RA}{RS} = \dfrac{RB}{RT}$,

alors $(AB) // (ST)$.

Enoncé de la réciproque

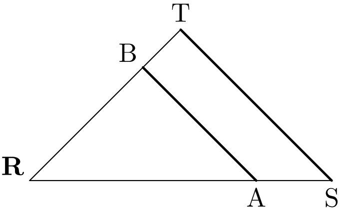
A est sur (RS)
B est sur (RT)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{RA}{RS} = \dfrac{RB}{RT}$,

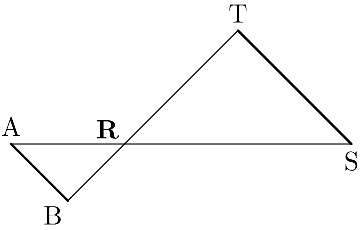
alors $(AB) \,//\, (ST)$.

Cet énoncé est valable pour l'une des deux configurations suivantes :

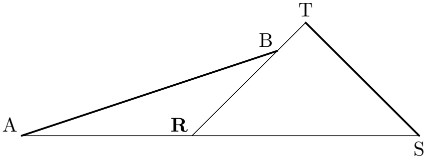
Le triangle



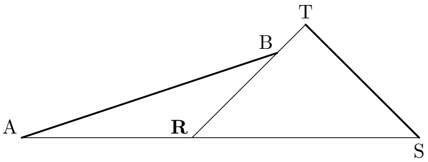
La figure papillon



L'hypothèse sur l'ordre des points sert à éliminer les figures du type ci-contre pour lesquelles les rapports sont égaux alors que les droites ne sont de toute évidence pas parallèles.



L'hypothèse sur l'ordre des points sert à éliminer les figures du type ci-contre pour lesquelles les rapports sont égaux alors que les droites ne sont de toute évidence pas parallèles.



$\dfrac{RA}{RS} = \dfrac{RB}{RT} = \dfrac{2}{3}$, mais les droites ne sont pas parallèles.

But de la réciproque

La réciproque du théorème de Thalès sert à vérifier si deux droites sont parallèles.

But de la réciproque

La réciproque du théorème de Thalès sert à vérifier si deux droites sont parallèles.

Pour cela, on est amené à comparer les deux rapports de l'énoncé.

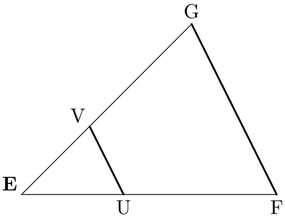
But de la réciproque

La réciproque du théorème de Thalès sert à vérifier si deux droites sont parallèles.

Pour cela, on est amené à comparer les deux rapports de l'énoncé.

Il faut donc connaître les quatre longueurs concernées ou du moins les deux rapports.

Première application : les droites sont parallèles



Enoncé

Sur la figure ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.
On donne :
$EF = 6cm$, $EG = 5cm$,
$FG = 4cm$,
$EU = 2,4cm$ et $EV = 2cm$

Les droites (FG) et (UV) sont-elles parallèles ?

Solution

Vérifions si $(FG) \mathbin{/\!/} (UV)$.

.

Solution

Vérifions si (FG) // (UV).

U est sur (EF)

.

Solution

Vérifions si (FG) // (UV).

U est sur (EF)
V est sur (EG)

.

Solution

Vérifions si (FG) // (UV).

U est sur (EF)
V est sur (EG)
L'ordre des points est respecté.

Solution

Vérifions si $(FG) // (UV)$.

U est sur (EF)
V est sur (EG)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

.

Solution

Vérifions si (FG) // (UV).

U est sur (EF)
V est sur (EG)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{EU}{EF} = \dfrac{EV}{EG}$,

.

Solution

<u>Vérifions si $(FG) \,//\, (UV)$.</u>

U est sur (EF)
V est sur (EG)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{EU}{EF} = \dfrac{EV}{EG}$,

alors $(UV) \,//\, (EF)$.

Solution

Vérifions si (FG) // (UV).

U est sur (EF)
V est sur (EG)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{EU}{EF} = \dfrac{EV}{EG}$,

alors (UV) // (EF).

Vérifions en calculant les produits en croix :

Solution

Vérifions si (FG) // (UV).

U est sur (EF)
V est sur (EG)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{EU}{EF} = \dfrac{EV}{EG}$,

alors (UV) // (EF).

Vérifions en calculant les produits en croix :

$$EU \times EG = 2,4 \times 5 = 12$$

Solution

Vérifions si $(FG) \,//\, (UV)$.

U est sur (EF)
V est sur (EG)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\frac{EU}{EF} = \frac{EV}{EG}$,

alors $(UV) \,//\, (EF)$.

Vérifions en calculant les produits en croix :

$EU \times EG = 2,4 \times 5 = 12$
$EV \times EF = 2 \times 6 = 12$

Solution

Vérifions si $(FG) \mathbin{//} (UV)$.

U est sur (EF)
V est sur (EG)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{EU}{EF} = \dfrac{EV}{EG}$,

alors $(UV) \mathbin{//} (EF)$.

Vérifions en calculant les produits en croix :

$EU \times EG = 2,4 \times 5 = 12$
$EV \times EF = 2 \times 6 = 12$

Comme $\dfrac{EU}{EF} = \dfrac{EV}{EG}$,

Solution

Vérifions si (FG) // (UV).

U est sur (EF)
V est sur (EG)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{EU}{EF} = \dfrac{EV}{EG}$,

alors (UV) // (EF).

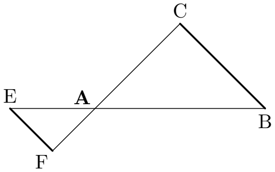
Vérifions en calculant les produits en croix :

$EU \times EG = 2,4 \times 5 = 12$
$EV \times EF = 2 \times 6 = 12$

Comme $\dfrac{EU}{EF} = \dfrac{EV}{EG}$,

$\boxed{(UV) \text{ // } (EF).}$

Deuxième application : les droites ne sont pas parallèles



Enoncé

Sur la figure ci-contre, les dimensions ne sont pas respectées.
On donne :
$AB = 6cm$, $BC = 4cm$,
$AC = 5cm$,
$EA = 5cm$ et $AF = 4cm$

Les droites (EF) et (BC) sont-elles parallèles ?

Solution

Vérifions si (EF) // (BC).

Solution

Vérifions si (EF) // (BC).

E est sur (AB)

Solution

Vérifions si (EF) // (BC).

E est sur (AB)
F est sur (AC)

Solution

Vérifions si (EF) // (BC).

E est sur (AB)
F est sur (AC)
L'ordre des points est respecté.

Solution

Vérifions si $(EF) \mathbin{//} (BC)$.

E est sur (AB)
F est sur (AC)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

Solution

Vérifions si $(EF) \mathbin{//} (BC)$.

E est sur (AB)
F est sur (AC)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$,

Solution

Vérifions si (EF) // (BC).

E est sur (AB)
F est sur (AC)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$,

alors (EF) // (BC).

Solution

Vérifions si (EF) // (BC).

E est sur (AB)
F est sur (AC)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$,

alors (EF) // (BC).

Vérifions en calculant les produits en croix :

Solution

<u>Vérifions si (EF) // (BC).</u>

E est sur (AB)
F est sur (AC)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$,

alors (EF) // (BC).

Vérifions en calculant les produits en croix :

$AE \times AC = 5 \times 5 = 25$

Solution

Vérifions si $(EF) \mathbin{/\!/} (BC)$.

E est sur (AB)
F est sur (AC)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$,

alors $(EF) \mathbin{/\!/} (BC)$.

Vérifions en calculant les produits en croix :

$AE \times AC = 5 \times 5 = 25$
$AB \times AF = 6 \times 4 = 24$

Solution

Vérifions si (EF) // (BC).

E est sur (AB)
F est sur (AC)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$,

alors (EF) // (BC).

Vérifions en calculant les produits en croix :

$AE \times AC = 5 \times 5 = 25$
$AB \times AF = 6 \times 4 = 24$

Comme $\frac{AE}{AB} \neq \frac{AF}{AC}$,

Solution

<u>Vérifions si $(EF) \; // \; (BC)$.</u>

E est sur (AB)
F est sur (AC)
L'ordre des points est respecté.
D'après la réciproque du théorème de Thalès,

si $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$,

alors $(EF) \; // \; (BC)$.

Vérifions en calculant les produits en croix :

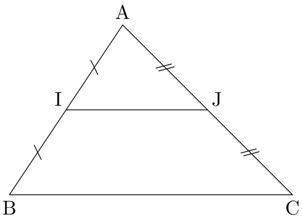
$AE \times AC = 5 \times 5 = 25$
$AB \times AF = 6 \times 4 = 24$

Comme $\dfrac{AE}{AB} \neq \dfrac{AF}{AC}$,

les droites (UV) et (EF) ne sont pas parallèles.

La droite des milieux

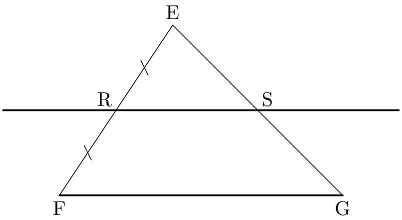
Première propriété



Dans le triangle ABC,
I milieu de $[AB]$.
J milieu de $[AC]$.
D'après la première propriété des milieux,

$$IJ = \frac{BC}{2} \text{ et } (IJ) \mathbin{//} BC.$$

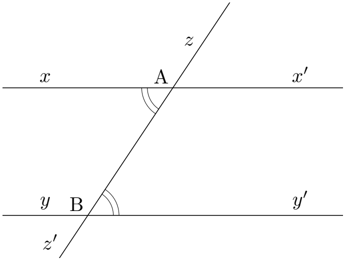
Deuxième propriété



Dans le triangle EFG,
R milieu de $[EF]$.
La parallèle à (FG) passant par R coupe $[EG]$ en S.
D'après la seconde propriété des milieux,
R est le milieu de $[EG]$.

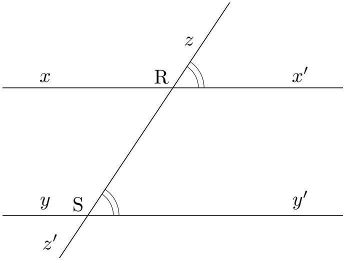
Angles et parallélisme

Les angles alternes internes



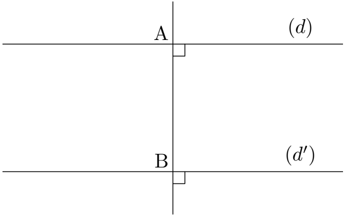
Sur le dessin ci-dessus,
les angles alternes internes $\widehat{xAB}$ et $\widehat{ABy'}$ étant de même mesure,
alors les droites (xx') et (yy') sont parallèles.

Les angles correspondants



Sur le dessin ci-dessus,
les angles correspondants $\widehat{zRx'}$ et $\widehat{RSy'}$ étant de même mesure,
alors les droites (xx') et (yy') sont parallèles.

Les droites perpendiculaires



Sur le dessin ci-dessus,
$(d) \perp (AB)$
$(d') \perp (AB)$
alors, (d) // (d').