Le calcul littéral

D. LE FUR

Lycée Pasteur, São Paulo

Sommaire

Produit	$\rightarrow$	**Somme algébrique**
	$\rightarrow$	
$k(a+b)$	$\rightarrow$	$ka+kb$
	$\rightarrow$	
$k(a-b)$	$\rightarrow$	$ka-kb$

Applications et exemples:

- Calcul mental:
  $13\times 99 = 13\times(100-1) = 13\times 100-13\times 1 = 1300-13 = 1287$

  $25\times 104 = 25\times(100+4) = 25\times 100+25\times 4 = 2500+100+2600$

Applications et exemples:

- Calcul mental:
  $13\times99 = 13\times(100-1) = 13\times100-13\times1 = 1300-13 = 1287$

  $25\times104 = 25\times(100+4) = 25\times100+25\times4 = 2500+100+2600$

- **Développement d'une expression littérale:**
  $3(5a+7) = 3\times5a+3\times7 = 15a+21$

  $-2(5-4x) = -2\times5-(-2)\times4x = -10+8x$

Sommaire

Produit	$\to$	**Somme algébrique**
	$\to$	
$(a+b)(c+d)$	$\to$	$ac+ad+bc+bd$

Applications et exemples:
Développement d'une expression littérale:

- $$E = (3-a)(4a+2) = 3\times 4a \ + \ 3\times 2 \ - \ a\times 4a \ - \ a\times 2$$
  $$E = 12a + 6 - 4a^2 - 2a = -4a^2 + 10a + 6$$

Applications et exemples:
Développement d'une expression littérale:

- $$E = (3 - a)(4a + 2) = 3 \times 4a \; + \; 3 \times 2 \; - \; a \times 4a \; - \; a \times 2$$
  $$E = 12a + 6 - 4a^2 - 2a = -4a^2 + 10a + 6$$

- $$F = (3x-2)(1-4x) = 3x\times1 + 3x\times(-4x) - 2\times1 - 2\times(-4x)$$
  $$F = 3x - 12x^2 - 2 + 8x = -12x^2 + 11x - 2$$

Pour ne pas se tromper dans les signes, il est utile de se souvenir que, par exemple, $3x - 2$ est la somme de $3x$ et de -2, et que $1 - 4x$ est la somme de 1 et de $-4x$. Ainsi, pour le calcul précédent, on a:

$G = (3x - 2)(1 - 4x)$
$G = (3x + (-2))\,(1 + (-4x))$
$G = (3x) \times 1 \ + \ (3x) \times (-4x) \ + \ (-2) \times 1 \ + \ (-2) \times (-4x)$
$G = \dots$

Sommaire

Produit	$\rightarrow$	**Somme algébrique**
Carré d'une somme		
$(a+b)^2$	$\rightarrow$	$a^2+2ab+b^2$
Carré d'une différence		
$(a-b)^2$	$\rightarrow$	$a^2-2ab+b^2$
Produit d'une somme par une différence		
$(a-b)(a+b)$	$\rightarrow$	a^2-b^2

Applications et exemples:

- **Calcul mental:**
  - $101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 + 1^2$
    $101^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$
  - $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \times 20 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$
  - $39 \times 41 = (40-1)(40+1) = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$

Applications et exemples:

- **Calcul mental:**
  - $101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 + 1^2$
    $101^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$
  - $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \times 20 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$
  - $39 \times 41 = (40-1)(40+1) = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$
- **Développement d'une expression littérale:**
  - $(y+7)^2 = y^2 + 2 \times y \times 7 + 7^2 = y^2 + 14y + 49$
  - $(1-3x)^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times 3x + (3x)^2 = 1 - 6x + 9x^2$
  - $(20-8x)(20+8x) = 20^2 - (8x)^2 = 400 - 64x^2$

Sommaire

Factoriser une somme algébrique signifie la transformer en produit :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\textbf{Produit}} \arrow[rr, bend left, "\text{Développer}"] & & \boxed{\textbf{Somme algébrique}} \arrow[ll, bend left, "\text{Factoriser}"]
\end{tikzcd}$$

Sommaire

On utilise la propriété de simple distributivité, mais "à l'envers" :

Somme algébrique	$\rightarrow$	**Produit**
$\underline{k}a + \underline{k}b$	$\rightarrow$ $\rightarrow$	$\underline{k}(a+b)$
$\underline{k}a - \underline{k}b$	$\rightarrow$ $\rightarrow$	$\underline{k}(a-b)$

Dans les sommes algébriques de gauche, il y a deux termes, chacun étant un produit de deux facteurs. Comme k se retrouve dans les deux termes, on dit que c'est un **facteur commun** aux deux termes. On dit également que l'on a "**mis k en facteur**".

Applications et exemples:

- **Calcul mental:**

  $13 \times 62 + 13 \times 38 = 13 \times (62 + 38) = 13 \times 100 = 1300$

  $18.1 \times 34.8 - 8.1 \times 34.8 = (18.1 - 8.1) \times 34.8 = 10 \times 34.8 = 348$

Applications et exemples:

- **Calcul mental:**
  $13 \times 62 + 13 \times 38 = 13 \times (62 + 38) = 13 \times 100 = 1300$

  $18.1 \times 34.8 - 8.1 \times 34.8 = (18.1 - 8.1) \times 34.8 = 10 \times 34.8 = 348$
- **Factorisation d'une expression littérale grâce à un facteur commun:**
  $A = 4a^2 + 3a = \underline{a} \times 4a + 3 \times \underline{a} = a(4a + 3)$

  $B = (x + 7)\underline{(5 - 4x)} - 2\underline{(5 - 4x)}$
  $B = (5-4x) \times [(x+7)-2] = (5-4x)(x+7-2) = (5-4x)(x+5)$

  $C = (x + 3)^2 - 5(x + 3) = \underline{(x - 3)}(x - 3) - 5\underline{(x - 3)}$
  $C = (x+3) \times [(x+3) - 5] = (x-3)(x+3-5) = (x+3)(x-2)$

Sommaire

Là aussi, on utilise les identités remarquables vues au paragraphe 1.3, mais "dans l'autre sens" :

Somme algébrique	$\rightarrow$	**Produit**
$a^2 + 2ab + b^2$	$\rightarrow$	$(a+b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	$\rightarrow$	$(a-b)^2$
$a^2 - b^2$	$\rightarrow$	$(a-b)(a+b)$

Applications à la factorisation d'expressions littérales:

$A = y^2 + 4y + 4$
$A = (y)^2 + 2(y)(2) + (2)^2$
$A = (y+2)^2$

$B = 9x^2 - 6x + 1$
$B = (3x)^2 - 2(3x)(1) + (1)^2$
$B = (3x-1)^2$

$C = (x+5)^2 - 9$
$C = (x+5)^2 - (3)^2$
$C = [(x+5) - 3] \times [(x+5) + 3]$
$C = (x+2)(x+8)$