LE TRIANGLE RECTANGLE

D. LE FUR

Lycée Pasteur, São Paulo

Le théorème de Pythagore

Enoncé du théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

But du théorème

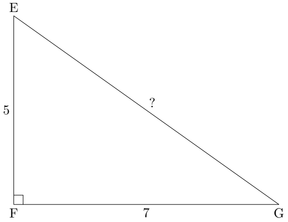
Le théorème de Pythagore sert à calculer un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres.

But du théorème

Le théorème de Pythagore sert à calculer un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres.

Cependant, l'énoncé du théorème ne dépend pas du côté cherché.

Première application : calcul de l'hypoténuse



Enoncé

Sur la figure ci-contre, le triangle EFG est rectangle en F.
On donne : $EF = 5$ et $FG = 7$.
Calculer EG. On donnera sa valeur exacte, puis sa valeur arrondie au dixième.

Solution

Calculons EG.

Solution

Calculons EG.

Dans le triangle EFG rectangle en F,

Solution

Calculons EG.

Dans le triangle EFG rectangle en F,
d'après le théorème de Pythagore,

Solution

Calculons EG.

Dans le triangle EFG rectangle en F,
d'après le théorème de Pythagore,

$$EF^2 + FG^2 = EG^2$$

Solution

Calculons EG.

Dans le triangle EFG rectangle en F,
d'après le théorème de Pythagore,

$EF^2 + FG^2 = EG^2$

$5^2 + 7^2 = EG^2$

Solution

Calculons EG.

Dans le triangle EFG rectangle en F,
d'après le théorème de Pythagore,

$EF^2 + FG^2 = EG^2$

$5^2 + 7^2 = EG^2$
$25 + 49 = EG^2$

Solution

Calculons EG.

Dans le triangle EFG rectangle en F,
d'après le théorème de Pythagore,

$EF^2 + FG^2 = EG^2$

$5^2 + 7^2 = EG^2$
$25 + 49 = EG^2$
$EG^2 = 74$

Solution

Calculons EG.

Dans le triangle EFG rectangle en F,
d'après le théorème de Pythagore,

$EF^2 + FG^2 = EG^2$

$5^2 + 7^2 = EG^2$
$25 + 49 = EG^2$
$EG^2 = 74$

$EG = \sqrt{74}$ (valeur exacte)

Solution

Calculons EG.

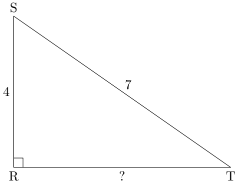
Dans le triangle EFG rectangle en F,
d'après le théorème de Pythagore,

$EF^2 + FG^2 = EG^2$

$5^2 + 7^2 = EG^2$
$25 + 49 = EG^2$
$EG^2 = 74$

$EG = \sqrt{74}$ (valeur exacte)
D'après la calculatrice $EG = 8,6$ (valeur arrondie au dixième)

Deuxième application : calcul d'un côté de l'angle droit



Enoncé

Sur la figure ci-contre, le triangle RST est rectangle en R.
On donne : $RS = 4$ et $ST = 7$.
Calculer RT. On donnera sa valeur exacte, puis sa valeur arrondie au dixième.

Solution

Calculons RT.

Solution

Calculons RT.

Dans le triangle RST rectangle en R,

Solution

Calculons RT.

Dans le triangle RST rectangle en R,
d'après le théorème de Pythagore,

Solution

Calculons RT.

Dans le triangle RST rectangle en R,
d'après le théorème de Pythagore,

$$SR^2 + RT^2 = ST^2$$

Solution

Calculons RT.

Dans le triangle RST rectangle en R,
d'après le théorème de Pythagore,

$$SR^2 + RT^2 = ST^2$$

$$4^2 + RT^2 = 7^2$$

Solution

Calculons RT.

Dans le triangle RST rectangle en R,
d'après le théorème de Pythagore,

$$SR^2 + RT^2 = ST^2$$

$$4^2 + RT^2 = 7^2$$
$$16 + RT^2 = 49$$

Solution

Calculons RT.

Dans le triangle RST rectangle en R,
d'après le théorème de Pythagore,

$SR^2 + RT^2 = ST^2$

$4^2 + RT^2 = 7^2$
$16 + RT^2 = 49$
$RT^2 = 49 - 16$

Solution

Calculons RT.

Dans le triangle RST rectangle en R,
d'après le théorème de Pythagore,

$$SR^2 + RT^2 = ST^2$$

$$4^2 + RT^2 = 7^2$$
$$16 + RT^2 = 49$$
$$RT^2 = 49 - 16$$
$$RT^2 = 33$$

Solution

Calculons RT.

Dans le triangle RST rectangle en R,
d'après le théorème de Pythagore,

$$SR^2 + RT^2 = ST^2$$

$$4^2 + RT^2 = 7^2$$
$$16 + RT^2 = 49$$
$$RT^2 = 49 - 16$$
$$RT^2 = 33$$

$RT = \sqrt{33}$ (valeur exacte)

Solution

Calculons RT.

Dans le triangle RST rectangle en R,
d'après le théorème de Pythagore,

$SR^2 + RT^2 = ST^2$

$4^2 + RT^2 = 7^2$
$16 + RT^2 = 49$
$RT^2 = 49 - 16$
$RT^2 = 33$

$RT = \sqrt{33}$ (valeur exacte)
D'après la calculatrice $RT = 5,7$ (valeur arrondie au dixième)

Réciproque du théorème de Pythagore

Enoncé de la réciproque

Dans un triangle, **si** la somme des carrés des deux petits côtés est égal au carré du grand côté, **alors** le triangle est rectangle et le grand côté est son hypoténuse.

Enoncé de la réciproque

Dans un triangle, **si** la somme des carrés des deux petits côtés est égal au carré du grand côté, **alors** le triangle est rectangle et le grand côté est son hypoténuse.

Cette égalité doit être parfaite : aucun arrondi ne peut être utilisé.

But de la réciproque

La réciproque du théorème de Pythagore sert à vérifier si un triangle est rectangle ou non.

But de la réciproque

La réciproque du théorème de Pythagore sert à vérifier si un triangle est rectangle ou non.

Pour l'utiliser, il est nécessaire de connaître les trois longueurs du triangle.

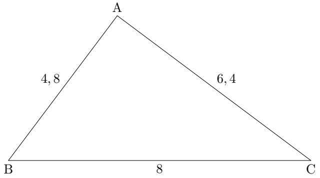
But de la réciproque

La réciproque du théorème de Pythagore sert à vérifier si un triangle est rectangle ou non.

Pour l'utiliser, il est nécessaire de connaître les trois longueurs du triangle.

NB : il ne faut jamais utiliser le théorème de Pythagore pour calculer une longueur manquante pour ensuite vouloir utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

Première application : cas d'un triangle rectangle



Enoncé

Sur la figure ci-contre, on donne : $AB = 4,8$, $AC = 6,4$ et $BC = 8$.
Montrer que ABC est un triangle rectangle.

Solution

Montrons que le triangle ABC est rectangle en A.

Solution

Montrons que le triangle ABC est rectangle en A.

$[BC]$ est le grand côté du triangle.

Solution

Montrons que le triangle ABC est rectangle en A.

$[BC]$ est le grand côté du triangle.
$BC^2 = 8^2 = 64.$

Solution

Montrons que le triangle ABC est rectangle en A.

$[BC]$ est le grand côté du triangle.
$BC^2 = 8^2 = 64.$
$BA^2 + AC^2 = 4,8^2 + 6,4^2 = 23,04 + 40,96 = 64.$

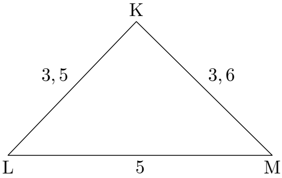
Solution

Montrons que le triangle ABC est rectangle en A.

[BC] est le grand côté du triangle.
$BC^2 = 8^2 = 64$.
$BA^2 + AC^2 = 4,8^2 + 6,4^2 = 23,04 + 40,96 = 64$.

Comme $BA^2 + AC^2 = BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Deuxième application : cas d'un triangle non rectangle



Enoncé

Sur la figure ci-contre, on donne : $KL = 3,5$, $LM = 5$ et $KM = 3,6$.
Le triangle KLM est-il rectangle ?

Solution

Vérifions si le triangle KLM est rectangle en K.

Solution

Vérifions si le triangle KLM est rectangle en K.

[LM] est le grand côté du triangle.

Solution

Vérifions si le triangle KLM est rectangle en K.

[LM] est le grand côté du triangle.
$LM^2 = 5^2 = 25$

Solution

Vérifions si le triangle KLM est rectangle en K.

[LM] est le grand côté du triangle.
$LM^2 = 5^2 = 25$
$LK^2 + KM^2 = 3,5^2 + 3,6^2 = 12,25 + 12,96 = 25,21$

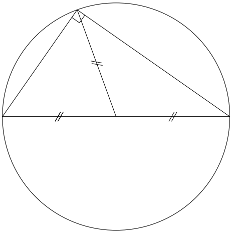
Solution

Vérifions si le triangle KLM est rectangle en K.

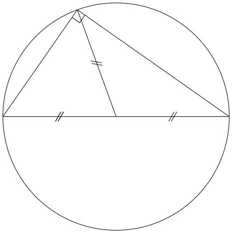
[LM] est le grand côté du triangle.
$LM^2 = 5^2 = 25$
$LK^2 + KM^2 = 3,5^2 + 3,6^2 = 12,25 + 12,96 = 25,21$

Comme $LK^2 + KM^2 \neq LM^2$, le triangle KLM n'est pas rectangle.

Propriété

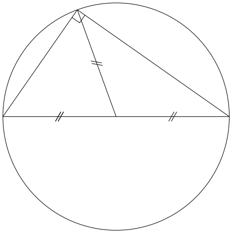


Propriété



Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

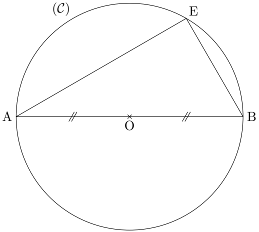
Propriété



Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Autrement dit, la médiane issue de l'angle droit est égale à la moitié de l'hypoténuse.

Première application : le cercle est donné



Enoncé

$(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O. On donne $AB = 6$.
E est un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $BE = 4$.
Montrer que ABE est un triangle rectangle.

Solution

Montrons que le triangle ABE est rectangle en E.

Solution

Montrons que le triangle ABE est rectangle en E.

E est un point du cercle de diamètre $[AB]$,

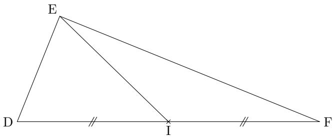
Solution

Montrons que le triangle ABE est rectangle en E.

E est un point du cercle de diamètre $[AB]$,

alors le triangle ABE est rectangle en E.

Deuxième application : le cercle n'est pas donné



Enoncé

Sur la figure ci-contre, DEF est un triangle tel que :

- I est le milieu de $[DF]$;
- $DF = 8$, $DE = 3$ et $IE = 4$.

Montrer que DEF est un triangle rectangle.

Solution

Montrons que le triangle DEF est rectangle en E.

Solution

Montrons que le triangle DEF est rectangle en E.

I est le milieu de $[DF]$, d'où

Solution

Montrons que le triangle DEF est rectangle en E.

I est le milieu de $[DF]$, d'où $DI = IF = \dfrac{DF}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.

On a donc

Solution

Montrons que le triangle DEF est rectangle en E.

I est le milieu de $[DF]$, d'où $DI = IF = \dfrac{DF}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.
On a donc $ID = IF = IE = 4$.

Solution

Montrons que le triangle DEF est rectangle en E.

I est le milieu de $[DF]$, d'où $DI = IF = \dfrac{DF}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.
On a donc $ID = IF = IE = 4$.

I, milieu de $[DF]$, est le centre du cercle circonscrit du triangle DEF,

Solution

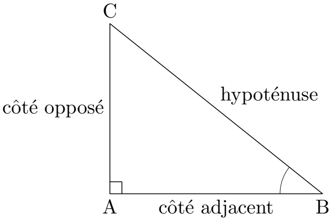
Montrons que le triangle DEF est rectangle en E.

I est le milieu de $[DF]$, d'où $DI = IF = \dfrac{DF}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.
On a donc $ID = IF = IE = 4$.

I, milieu de $[DF]$, est le centre du cercle circonscrit du triangle DEF, alors DEF est rectangle en E.

TRIGONOMETRIE

Comment nommer les côtés



Sur le dessin ci-contre, on a choisi l'angle aigu $\widehat{ABC}$.

- $[AC]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$;
- $[AB]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$.

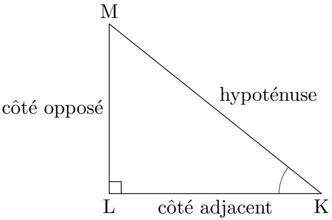
Si on s'intéresse maintenant à l'angle $\widehat{ACB}$,

- $[AB]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$;
- $[AC]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$;

NB : à chaque utilisation de la trigonométrie dans un exercice, il sera important de faire un schéma à main levée, de colorier l'angle aigu choisi et de nommer les côtés du triangle.

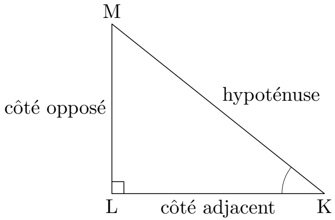
Les formules

Le cosinus



Les formules

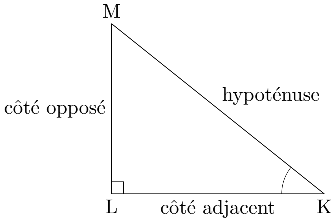
Le cosinus



Dans le triangle KLM rectangle en L,

Les formules

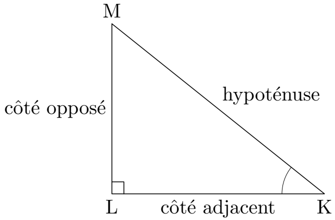
Le cosinus



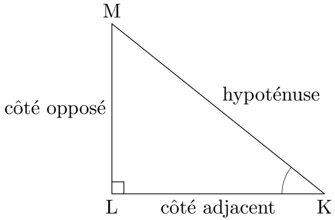
Dans le triangle KLM rectangle en L,

$$\cos(\widehat{LKM}) = \frac{LK}{MK} \left(= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \right)$$

Le sinus

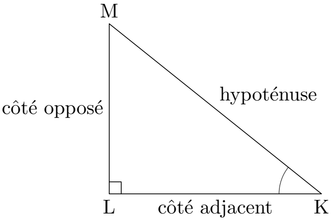


Le sinus



Dans le triangle KLM rectangle en L,

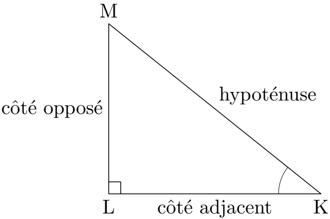
Le sinus



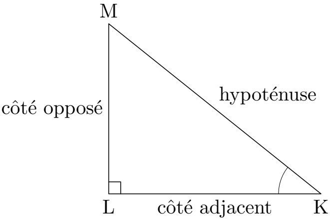
Dans le triangle KLM rectangle en L,

$$\sin(\widehat{LKM}) = \frac{LM}{MK} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$$

La tangente

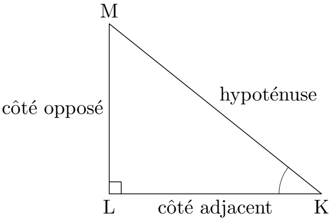


La tangente



Dans le triangle KLM rectangle en L,

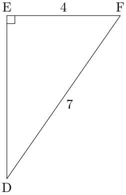
La tangente



Dans le triangle KLM rectangle en L,

$$\tan(\widehat{LKM}) = \frac{LM}{LK} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \right)$$

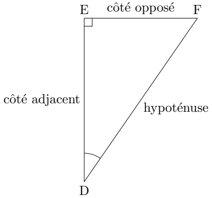
Première application : calcul d'un angle



Enoncé

Sur la figure ci-contre, DEF est un triangle rectangle en E tel que : $DF = 7$ et $EF = 4$.

1. Calculer l'angle $\widehat{EDF}$. On arrondira sa valeur au degré près.
2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{EFD}$ au degré près



Commentaires

La première étape consiste à colorier l'angle $\widehat{EDF}$ et à nommer les côtés du triangle.
Comme on connaît son côté opposé et l'hypoténuse, la formule trigonométrique à utiliser est le *sinus*.
Il est conseillé de marquer sur ce document la combinaison de touches de la calculatrice à utiliser pour parvenir au résultat.

Solution

1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

Solution

1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

   Dans le triangle DEF rectangle en E,

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

Solution

1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

Dans le triangle DEF rectangle en E,

$$\sin(\widehat{EDF}) = \frac{EF}{DF} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$$

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

Solution

1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

Dans le triangle DEF rectangle en E,
$\sin(\widehat{EDF}) = \dfrac{EF}{DF} \left(= \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$

$\sin(\widehat{EDF}) = \dfrac{4}{7}$

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

Solution

1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

Dans le triangle DEF rectangle en E,

$$\sin(\widehat{EDF}) = \frac{EF}{DF} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$$

$$\sin(\widehat{EDF}) = \frac{4}{7}$$

D'après la calculatrice,

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

Solution

1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

   Dans le triangle DEF rectangle en E,
   $\sin(\widehat{EDF}) = \dfrac{EF}{DF} \left(= \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$

   $\sin(\widehat{EDF}) = \dfrac{4}{7}$

   D'après la calculatrice, $\boxed{\widehat{EDF} = 35°.}$ (On a utilisé $\sin^{-1}$.)

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

Solution

1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

> Dans le triangle DEF rectangle en E,
> $\sin(\widehat{EDF}) = \dfrac{EF}{DF} \left(= \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$

$\sin(\widehat{EDF}) = \dfrac{4}{7}$

D'après la calculatrice, $\boxed{\widehat{EDF} = 35°.}$ (On a utilisé $\sin^{-1}$.)

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

Dans le triangle DEF rectangle en E, les angles aigus $\widehat{EDF}$ et $\widehat{EFD}$ sont complémentaires.

Solution

1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

   Dans le triangle DEF rectangle en E,
   $$\sin(\widehat{EDF}) = \frac{EF}{DF} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$$

   $$\sin(\widehat{EDF}) = \frac{4}{7}$$

   D'après la calculatrice, $\boxed{\widehat{EDF} = 35°.}$ (On a utilisé $\sin^{-1}$.)

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

   Dans le triangle DEF rectangle en E, les angles aigus $\widehat{EDF}$ et $\widehat{EFD}$ sont complémentaires.
   On a donc : $\widehat{EDF} + \widehat{EFD} = 90°$.

Solution

1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

   Dans le triangle DEF rectangle en E,
   $\sin(\widehat{EDF}) = \frac{EF}{DF} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$

   $\sin(\widehat{EDF}) = \frac{4}{7}$

   D'après la calculatrice, $\boxed{\widehat{EDF} = 35°.}$ (On a utilisé $\sin^{-1}$.)

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

   Dans le triangle DEF rectangle en E, les angles aigus $\widehat{EDF}$ et $\widehat{EFD}$ sont complémentaires.
   On a donc : $\widehat{EDF} + \widehat{EFD} = 90°$.
   D'où, $\widehat{EFD} = 90 - \widehat{EDF} = 90 - 35$.

Solution

1. Calculons l'angle $\widehat{EDF}$.

   Dans le triangle DEF rectangle en E,
   $$\sin(\widehat{EDF}) = \frac{EF}{DF} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)$$

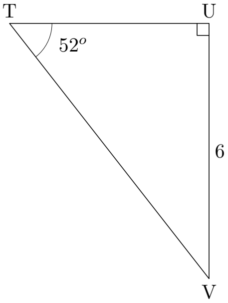
   $$\sin(\widehat{EDF}) = \frac{4}{7}$$

   D'après la calculatrice, $\boxed{\widehat{EDF} = 35°.}$ (On a utilisé $\sin^{-1}$.)

2. Calculons l'angle $\widehat{EFD}$.

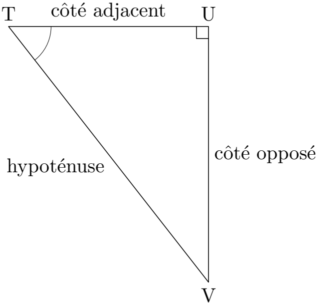
   Dans le triangle DEF rectangle en E, les angles aigus $\widehat{EDF}$ et $\widehat{EFD}$ sont complémentaires.
   On a donc : $\widehat{EDF} + \widehat{EFD} = 90°$.
   D'où, $\widehat{EFD} = 90 - \widehat{EDF} = 90 - 35$.
   $\boxed{\widehat{EFD} = 35°.}$

Deuxième application : calcul d'une longueur



Enoncé

Sur la figure ci-contre, TUV est un triangle rectangle en U tel que :
$UV = 6cm$ et $\widehat{VTU} = 52°$.
Calculer TU. On arrondira sa valeur au mm.



Commentaires

La première étape consiste à colorier l'angle $\widehat{VTU}$ et à nommer les côtés du triangle.
Comme on connaît son côté opposé et et que l'on cherche l'hypoténusee, la formule trigonométrique a utiliser est la *tangente*.
Il est conseillé de marquer sur ce document la combinaison de touches de la calculatrice à utiliser pour parvenir au résultat.

Solution

Calculons TU.

Solution

Calculons TU.

Dans le triangle TUV rectangle en U,

Solution

Calculons TU.

Dans le triangle TUV rectangle en U,

$$\tan(\widehat{VTU}) = \frac{VU}{TU} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \right)$$

Solution

Calculons TU.

Dans le triangle TUV rectangle en U,

$$\tan(\widehat{VTU}) = \frac{VU}{TU} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \right)$$

$$\tan(52) = \frac{6}{TU}$$

Solution

<u>Calculons TU.</u>

Dans le triangle TUV rectangle en U,
$$\tan(\widehat{VTU}) = \frac{VU}{TU} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \right)$$

$$\tan(52) = \frac{6}{TU}$$
$$TU \times \tan(52) = 6$$

Solution

Calculons TU.

Dans le triangle TUV rectangle en U,

$$\tan(\widehat{VTU}) = \frac{VU}{TU} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \right)$$

$$\tan(52) = \frac{6}{TU}$$

$$TU \times \tan(52) = 6$$

$$TU = \frac{6}{\tan(52)}$$

Solution

Calculons TU.

Dans le triangle TUV rectangle en U,

$$\tan(\widehat{VTU}) = \frac{VU}{TU} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \right)$$

$$\tan(52) = \frac{6}{TU}$$

$$TU \times \tan(52) = 6$$

$$TU = \frac{6}{\tan(52)}$$

D'après la calculatrice,

Solution

Calculons TU.

Dans le triangle TUV rectangle en U,
$$\tan(\widehat{VTU}) = \frac{VU}{TU} \left(= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \right)$$

$$\tan(52) = \frac{6}{TU}$$
$$TU \times \tan(52) = 6$$
$$TU = \frac{6}{\tan(52)}$$

D'après la calculatrice, $\boxed{TU = 4,7cm.}$ (On a utilisé sin.)